Escuela Superior de Administración Pública

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA

UNIDAD DIDÁCTICA 4

# INDUCCIÓN MATEMÁTICAS

## Productos y Cocientes Notables

Luis Miguel Cabrera González

UNIDAD DIDÁCTICA 4

**Facultad:** Pregrado

**Denominación del programa:** Administración Pública AP

**Nombre de la asignatura:** Inducción Matemáticas

**Modalidad**[1]**:** Presencial - Distancia

**Tipo de asignatura**[2]**:**

**Número de créditos**[3]**:**
**Horas de acompañamiento directo:**
**Horas de trabajo independiente:**

**Nombre del autor:** Luís Miguel Cabrera González

**Asesoría Pedagógica y Control de calidad:**

**Fecha última versión:** 20/06/2017

ISBN: 978-958-652-523-7

[1] Presencial, distancia o virtual.
[2] Teórico-práctica o teórica.
[3] Un crédito equivale a 48 horas distribuidas así: 12 horas de acompañamiento directo del docente y 36 horas de trabajo independiente, que involucra acompañamiento mediado y trabajo autónomo del estudiante (Decreto 1295 del 2010 y Decreto 1075 del 2015).

UNIDAD DIDÁCTICA 4

## CONTENIDO

UNIDAD DIDÁCTICA 4

## LISTA DE TABLAS



## LISTA DE FIGURAS

UNIDAD DIDÁCTICA 4

## UNIDAD DIDÁCTICA 4 – INDUCCIÓN MATEMÁTICAS PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

### RESUMEN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

El álgebra es una herramienta potente para resolver problemas complejos de manera general, siendo muy versátil al aplicarse a una variada gama de situaciones en la vida en general, razón por la cual, se hace énfasis en conceptos básicos como: Operaciones con Números reales, Exponentes y Radicales, Expresiones Algebraicas, Productos y Cocientes Notables y Factorización.

Los anteriores conceptos le permitirán al estudiante desarrollar habilidades para:

- Realizar operaciones con números reales utilizando propiedades fundamentales
- Construir modelos aritméticos o algebraicos con números reales, y
- Utilizar razones, tasas, proporciones y variaciones para modelar y solucionar problemas económicos.

Las habilidades desarrolladas apuntan al mejoramiento de competencias profesionales para la modelación de procesos Económicos, Financieros, Contables, Ambientales, Geo-referenciales, Tecnológicos e investigativos, donde el establecimiento de relaciones entre variables fomenta el pensamiento lógico, algebraico, numérico y variacional, potenciando la creatividad e innovación.

UNIDAD DIDÁCTICA 4

## COMPETENCIAS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

| ESTRUCTURA TEMÁTICA | | | |
|---|---|---|---|
| **Nombre de la unidad didáctica** | **Competencia de aprendizaje de la unidad didáctica** | **Tema** | **Subtemas** |
| **Inducción Matemáticas Productos y Cocientes Notables** | Comprende y aplica los conceptos básicos del álgebra como estrategia para resolver problemas complejos mediante la modelación de fenómenos cuantitativos de la Administración Pública. | 4. Productos y Cocientes Notables | 4.1 Productos Notables |
| | | | 4.2 Cocientes Notables |

UNIDAD DIDÁCTICA 4

## CONTENIDOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA 4 – PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

## TEMA 4 PRODUCTOS Y COCIENTES

### 4.1 PRODUCTOS NOTABLES

Al resolver el binomio $(a+b)^n$, donde n ≥ 0 y a + b ≠ 0, mediante la aplicación de la multiplicación de polinomios, se hallan resultados como:

$$(a+b)^0 = 1, si\ a+b\ \neq 0$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Al desarrollar el binomio se observa que:

a) Se generan n+1 términos

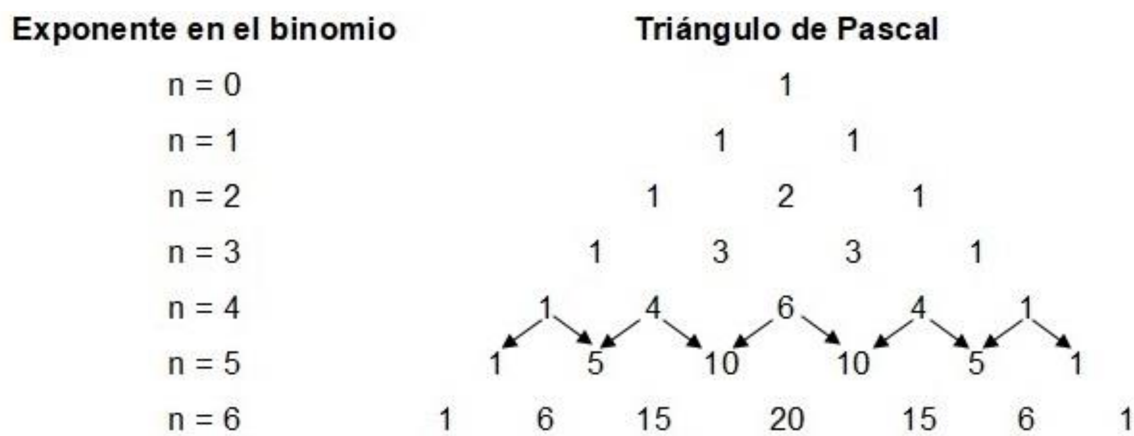
b) El primer término es $a^n$ y el último $b^n$

c) Los exponentes de **a** disminuyen de 1 en 1 y los de **b** aumentan de 1 en 1

d) Para cada término se observa que la suma de los exponentes es igual a n

La idea es encontrar una forma sencilla de generar el resultado para cualquier potencia, para lo cual, se analiza la potencia del binomio y los coeficientes que se obtienen en su respectivo desarrollo, como se ilustra a continuación:

**Figura 1. Triangulo de Pascal**




Fuente: Elaboración Propia.

UNIDAD DIDÁCTICA 4

Una forma fácil de recordar los coeficientes, se obtiene al observar por ejemplo para n = 5, que los coeficientes siempre inician en 1 y que cualquiera de ellos se obtiene sumando los coeficientes del anterior exponente como se observa en la Figura 1

**Ejemplo 1**: Desarrollemos $(a+b)^5$

Teniendo en cuenta los coeficientes para n = 5 de la figura anterior, se obtiene:

$$(a+b)^5 = \mathbf{1}.a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}.a^3b^2 + \mathbf{10}.a^2b^3 + \mathbf{5}.ab^4 + \mathbf{1}.b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

**Ejemplo 2**: desarrollar $(3x^{-2} - 2y^3)^2$

$(3x^{-2} - 2y^3)^2 = \mathbf{(}(3x^{-2}) + (-2y^3)\mathbf{)}^2$

$= (3x^{-2})^2 + 2(3x^{-2})(-2y^3) + (-2y^3)^2$

$= (3)^2(x^{-2})^2 - 12x^{-2}y^2 + (-2)^2(y^3)^2$

$= 9x^{-4} - 12x^{-2}y^3 + 4y^6$

UNIDAD DIDÁCTICA 4

**Ejemplo 3**: obtener (2a – 3B)3.

Teniendo en cuenta los coeficientes para n = 3, se obtiene:

$(2a - 3b)^3 = \mathbf{(}(2^a) + (-3b)\mathbf{)}^3$

$= \mathbf{1}.(2a)^3 + \mathbf{3}.(2a)^2(-3b) + \mathbf{3}.(2a)(-3b)^2 + \mathbf{1}.(-3b)^3$

$= 2^3a^3 + 3(4a^2)(-3b) + 3(2a)(9b^2) + (-3)^3b^3$

$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^34.2$

## COCIENTES NOTABLES

Los cocientes notables son expresiones que resultan de divisiones exactas entre polinomios, es decir que el residuo es igual a cero. Ilustremos la anterior definición con el ejemplo:

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

Aplicando el algoritmo de la división sintética tenemos:

Paso 1: aplicar la división

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 \quad - \; y^2 & x - y \\ \cline{2-2}
-x^2 + xy & x \\ \cline{1-1}
\qquad xy - y^2 &
\end{array}
$$

En el siguiente paso, aplicamos nuevamente el algoritmo de la división las veces que sea necesario hasta cuando ya no sea posible dividir más.

Paso 2: volver a dividir

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 \quad - \; y^2 & x - y \\ \cline{2-2}
-x^2 + xy & x + y \\ \cline{1-1}
\qquad xy - y^2 & \\
\qquad -xy + y^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

El resultado se puede expresar de la forma:

UNIDAD DIDÁCTICA 4

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$$

O también de la forma

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Constituyendo un famoso caso de factorización (diferencia de dos cuadrados).

Los cocientes notables se suelen utilizar como estrategia para obviar el proceso de división. Esto implica memorizar los resultados más usuales mediante la elaboración de ejercicios.

Entre los cocientes notables más usuales se tienen los siguientes:

**Tabla 1. Caso de factorización en cociente notable**

| Cociente notable | Caso de Factorización |
|---|---|
| $\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$ | $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ |
| $\frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$ | $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ |
| $\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$ | $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ |
| $\frac{x^3-y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2$ | $x^3-y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ |
| $\frac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+x^2y+xy^2+y^3$ | $x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$ |
| $\frac{x^4-y^4}{x+y}=x^3-x^2y+xy^2-y^3$ | $x^4-y^4=(x+y)(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$ |

Fuente: Elaboración Propia.

Se observa que existen varios casos, los cuales se pueden generalizar mediante el desarrollo de un modelo que permita agruparlos en una sola expresión. Para evitar confusiones se recomienda efectuar la división (proceso demorado pero seguro).

UNIDAD DIDÁCTICA 4

CASO DE ESTUDIO

- **Ejercicios**

**Resuelve los siguientes productos o cocientes notables**

**1.** $(2x-y)^2$

**2.** $(x-2y)^3$

**3.** $(2x+3y)^2$

**4.** $(a+b+c)^2$

**5.** $(2x^{-2}-y)^2$

**6.** $(x^{-1}-y^{-1})^2$

**7.** $(2x^2-3y)^2$

**8.** $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$

**9.** $(x^2-3y)^5$

**10.** $(3x-2y)^4$

**11.** $(2x^{-2}-3y^{-1})^2$

**12.** $(3x^{-2}+2y^2)^3$

**13.** $\frac{x^2-y^2}{x+y}$

**14.** $\frac{a^2-81}{a-9}$

**15.** $\frac{9x^2-25y^2}{3x+5y}$

UNIDAD DIDÁCTICA 4

16. $\frac{x^2-y^6}{x-y^3}$

17. $\frac{x^2-y^6}{x+y^3}$

18. $\frac{x^3+y^6}{x+y^2}$

19. $\frac{27-b^3}{3-b}$

20. $\frac{16a^4-25b^2}{4a^2-5b}$

21. $\frac{27x^3y^6+8x^9y^3}{3xy^2+2x^3y}$

22. $\frac{x^{-3}+y^{-6}}{x^{-1}+y^{-2}}$

23. $\frac{27x^3+8y^6}{3x+2y^2}$

24. $\frac{x^6+(y+z)^3}{x^2+(y+z)}$

25. $\frac{x^{12}+y^{12}}{x^4+y^{24}}$

26. $\frac{x^{15}-y^{15}}{x^3-y^3}$

27. $\frac{4x^2-9y^4}{2x-3y^2}$

28. $\frac{x^5+32}{x+2}$

29. $\frac{8x^3+27y^3}{2x+3y}$

**30.** $\frac{n^3 - m^3x^3}{n - mx}$

- **Cuestionario**

1. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

   Rta: Falsa

2. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a + b$

   Rta: Falsa

3. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $\frac{a^2+b^2}{a-b} = a + b$

   Rta: Falsa

4. Determine la validez de la siguiente expresión: $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a - b$

   Rta: Falsa

5. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

   Rta: Falsa

6. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

   Rta: Falsa

7. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $\sqrt{2a^2} = 2a$

Rta: Falsa

8. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $\sqrt{(-1)^2} = -1$
   Rta: Falsa

9. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $\sqrt{4a^2} = 2a$
   Rta: Verdadera

10. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $\sqrt[3]{8b^6} = 2b^2$
    Rta: Verdadera

11. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $\sqrt[3]{27b^{-6}} = 3b^{-2}$
    Rta: Verdadera

12. Determine si la siguiente expresión es verdadera o falsa: $\sqrt[3]{-27b^{-6}} = -3b^{-2}$
    Rta: Verdadera

13. Al resolver la expresión $(2x + y)^2$, se obtiene:
    a) $4x^2 + 4xy + y^2$
    b) $x^2 + 4xy + y^2$
    c) $4x^2 + 2xy + y^2$
    d) $x^2 + 2xy + y^2$

14. Al realizar la operación $(x - 2y)^2$, se obtiene:
    a) $x^2 - 4xy + 4y^2$
    b) $x^2 + 4xy + 4y^2$
    c) $2x^2 + 4xy + y^2$

d) $x^2 + 4xy - 4y^2$

15. Al efectuar la operación $(2x - 3y)^2$, se obtiene:
   a) $4x^2 - 12xy + 9y^2$
   b) $4x^2 - 12xy - 9y^2$
   c) $2x^2 - 12xy + 3y^2$
   d) $4x^2 - 6xy + 9y^2$

16. Al resolver la expresión $(2x^{-2} + y)^2$, se obtiene:
   a) $4x^{-4} + 4x^{-2}y + y^2$
   b) $4x^{-4} - 4x^{-2}y + y^2$
   c) $4x^{-2} + 4x^{-2}y + y^2$
   d) $2x^{-4} + 4x^{-2}y + y^2$

17. Al realizar la operación $(2x - 3y)^3$, se obtiene:
   a) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
   b) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
   c) $8x^3 - 36x^2y - 54xy^2 - 27y^3$
   d) $2x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 3y^3$

18. Al efectuar la operación $\frac{a^2-9}{a-3}$ , se obtiene:
   a) $a + 3$
   b) $a + 6$
   c) $a - 3$
   d) $a - 6$

19. Al efectuar la operación $\frac{a^2-9}{a+3}$, se obtiene:
   a) $a - 3$

b) $a+3$
c) $a-6$
d) $a+6$

20. Al resolver la operación $\frac{z^2-w^{-6}}{z-w^{-3}}$ , se obtiene:
a) $z+w^{-3}$
b) $z-w^{-3}$
c) $z+w^3$
d) $z-w^3$

21. Al resolver la operación $\frac{z^2-w^{-6}}{z+w^{-3}}$ , se obtiene:
a) $z-w^{-3}$
b) $z+w^{-3}$
c) $z-w^3$
d) $z+w^3$

22. Al realizar la operación $\frac{4x^2-9y^2}{2x+3y}$ , se obtiene:
a) $2x-3y$
b) $2x+3y$
c) $3x-2y$
d) $3x+2y$

23. Al realizar la operación $\frac{4x^2-9y^2}{2x-3y}$ , se obtiene:
a) $2x+3y$
b) $2x-3y$
c) $3x+2y$
d) $3x-2y$

UNIDAD DIDÁCTICA 4

24. Al efectuar la operación $\frac{8-b^3}{2-b}$, se obtiene:
   a) $4+2b+b^2$
   b) $4-2b+b^2$
   c) $4+2b-b^2$
   d) $2+2b+b^2$

25. Al efectuar la operación $\frac{8+b^3}{2+b}$, se obtiene:
   a) $4-2b+b^2$
   b) $4+2b+b^2$
   c) $2-2b+b^2$
   d) $4-b+b^2$

## CONCLUSIONES

Comprender los conceptos matemáticos básicos como insumo para resolver problemas complejos mediante la modelación de relaciones entre variables, permite abordar fenómenos económicos, financieros y logísticos presentes en la administración pública, con lo cual se promueve la toma de decisiones de manera racional, así como la gestión de recursos para satisfacer necesidades.

UNIDAD DIDÁCTICA 4

MATERIAL DE ESTUDIO

| Tema que abordan | Referencia bibliográfica | Ubicación |
|---|---|---|
| **Tema 4 Productos y Cocientes Notables** | AcademiaVasquez (2012). El Triángulo de Pascal: Teoría. | Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=yGN65T7D-gA |
| | Math2me (2015). Binomio a la cuarta. | Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=-JKH77AAlZY |
| | PolitecnicoAston (2013). Cocientes Notables. | Disponible en: https://vimeo.com/70488595 |

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS DEL CONTENIDO DISCIPLINAR

Angel, Allen. (2008). Álgebra intermedia. 7 Ed. Pearson Educación. México.

Arya, Jagdish., Lardner, Robin., Ibarra, Víctor. (2009). Matemáticas aplicadas a la Administración y Economía. 5 Ed. Prentice Hall. México.

Aufmann, Richard., Lockwood, Joanne. (2013). Álgebra intermedia. 8 Ed. Cengage Learning. México.

Haeussler, Ernest., Paul, Richard., Wood, Richard. (2008). Matemáticas para Administración y Economía. 12 Ed. Pearson – Prentice Hall. México.

Hernández, Hernán. (2004). Razonamiento Matemático. Estrategias en la resolución de problemas. 1 Ed. Editorial Ingenio S.A. Lima. Perú.

Hoffmann, Laurence., Bradley, Gerald., Rosen, Kenneth. (2006). Cálculo Aplicado para Administración, Economía y Ciencias Sociales. 8 Ed. McGraw-Hill. México.

Jiménez, René. (2011). Matemáticas 1 – Álgebra. 2 Ed. Prentice Hall. México.

Silva, Omar. (1994). Matemáticas Básicas. Universidad Externado de Colombia. Bogotá. Colombia.

Swokowski, Earl., Cole, Jeffery. (2011). Álgebra y Trigonometría. 13 Ed. Cengage Learning. México.

Tan, Soo. (2012). Matemáticas Aplicadas a los Negocios, Las Ciencias Sociales y de la Vida. 5 Ed. Cengage Learning. México.

WEBGRAFÍA

Definición ABC (2017). Tu Diccionario Hecho Fácil. Disponible en: https://www.definicionabc.com/ (19/05/17)

Disfruta Las Matemáticas (2017). Diccionario ilustrado de Matemáticas. Disponible en: http://www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/index.html (12/05/17)

Profesor en Línea (2017). Tú ayuda para las tareas. Disponible en: http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Indice_general_matematica.html (01/06/17)

Recursos TIC (2017). Ministerio de Educación, Formación Profesional y Universidades. España. Disponible en: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/ (20/05/17)

## GLOSARIO

**Conjunto:** Colección de elementos enumerados entre llaves { }.

**Exponente:** El exponente de un número muestra cuántas veces el número se va a utilizar en la multiplicación.

**Expresión:** Números, símbolos y operadores (como + y ×) agrupados para mostrar el valor de algo.

**Factorización:** Factorizar una expresión (suma de términos) significa escribirla como producto de dos o más términos llamados factores, con el objetivo de simplificarla y así poder resolver ecuaciones.

**Polinomio:** Expresión algebraica cuyo exponente es un entero positivo.

**Radical:** Una expresión que tiene raíz cuadrada, raíz cúbica, etc.

**Término:** Es un número o una variable, o números y variables multiplicados.

UNIDAD DIDÁCTICA 4

**Términos semejantes**: Términos que tienen iguales variables (letras) e iguales exponentes.

**Variable:** Un símbolo para un número que aún no sabemos. Es normalmente una letra como x o y.