Escuela Superior de Administración Pública

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA

INDUCCIÓN MATEMÁTICAS

UNIDAD DIDÁCTICA 5

Factorización

Luis Miguel Cabrera González

UNIDAD DIDÁCTICA 5

Facultad: Pregrado

Denominación del programa: Administración Pública AP

Nombre de la asignatura: Inducción Matemáticas

Modalidad[1]: Presencial - Distancia

Tipo de asignatura[2]:

Número de créditos[3]:
Horas de acompañamiento directo:
Horas de trabajo independiente:

Nombre del autor: Luís Miguel Cabrera González

Asesoría Pedagógica y Control de calidad:

Fecha última versión: 20/06/2017

ISBN:978-958-652-836-8

---

[1] Presencial, distancia o virtual.
[2] Teórico-práctica o teórica.
[3] Un crédito equivale a 48 horas distribuidas así: 12 horas de acompañamiento directo del docente y 36 horas de trabajo independiente, que involucra acompañamiento mediado y trabajo autónomo del estudiante (Decreto 1295 del 2010 y Decreto 1075 del 2015).

UNIDAD DIDÁCTICA 5

CONTENIDO

UNIDAD DIDÁCTICA 5

UNIDAD DIDÁCTICA 5 – INDUCCIÓN MATEMÁTICAS – FACTORIZACIÓN

RESUMEN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

El álgebra es una herramienta potente para resolver problemas complejos de manera general, siendo muy versátil al aplicarse a una variada gama de situaciones en la vida en general, razón por la cual, se hace énfasis en conceptos básicos como: Operaciones con Números reales, Exponentes y Radicales, Expresiones Algebraicas, Productos y Cocientes Notables y Factorización.

Los anteriores conceptos le permitirán al estudiante desarrollar habilidades para:

- Realizar operaciones con números reales utilizando propiedades fundamentales,
- Construir modelos aritméticos o algebraicos con números reales, y
- Utilizar razones, tasas, proporciones y variaciones para modelar y solucionar problemas económicos.

Las habilidades desarrolladas apuntan al mejoramiento de competencias profesionales para la modelación de procesos Económicos, Financieros, Contables, Ambientales, Geo-referenciales, Tecnológicos e investigativos, donde el establecimiento de relaciones entre variables fomenta el pensamiento lógico, algebraico, numérico y variacional, potenciando la creatividad e innovación.

COMPETENCIAS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

UNIDAD DIDÁCTICA 5

ESTRUCTURA TEMÁTICA			
Nombre de la unidad didáctica	**Competencia de aprendizaje de la unidad didáctica**	**Tema**	**Subtemas**
Inducción Matemáticas Productos y Cocientes Notables	Comprende y aplica los conceptos básicos del álgebra como estrategia para resolver problemas complejos mediante la modelación de fenómenos cuantitativos de la Administración Pública.	5. Factorización	5.1 Factor común en un polinomio
			5.2 Factorización por agrupación
			5.3 Factorización caso general

CONTENIDOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA 5 – FACTORIZACIÓN

TEMA 5. FACTORIZACION

Factorizar una expresión (suma de términos) significa escribirla como producto de dos o más términos llamados factores, con el objetivo de simplificarla y así poder resolver ecuaciones. Dicho proceso se basa en la propiedad distributiva para la adición y multiplicación.

Recordemos la propiedad distributiva con respecto a la adición:

Para todo a, b, c $\in \mathbb{R}$, se tiene que **a**.(b+c) = **a**.b + **a**.c

Analizando dicha igualdad de izquierda a derecha se tiene que:
a.b + **a**.c = **a**.(b+c), la cual se denomina factor común.

5.1 FACTOR COMÚN EN UN POLINOMIO

Analicemos varios ejemplos para ilustrar el procedimiento:

Se puede efectuar el producto para verificar la veracidad de la operación

Ejemplo 1. $3x - 6y = \mathbf{3}(x - 2y)$, factor común es el **3**
Ejemplo 2. $4ax + 6a = \mathbf{2a}(2x + 3)$, factor común es **2a**
Ejemplo 3. $3x^5 - 6x^3 = \mathbf{3x^3}(x^2 - 2)$, factor común es $\mathbf{3x^3}$
Ejemplo 4. $4x^3y^4 - 16x^2y^6 = \mathbf{4x^2y^2}(xy^2 - 4y^4)$, factor común $\mathbf{4x^2y^2}$

De los ejemplos anteriores, se observa que:

Para factorizar el polinomio por completo, es necesario seleccionar el máximo factor común – MFC, cuya forma general es $\mathbf{ax^n}$, donde:

a es el máximo entero que divide a cada uno de los coeficientes del polinomio y
n es el mínimo exponente de **x** en todos los términos del polinomio

Ejercicios: factoriza por completo cada expresión.

a) $6b - 24$
b) $4x^2 + 48$
c) $-5x^3 - 25x^6$
d) $5x^7 - 15x^6 + 10x^3 - 20x^2$
e) $24 + 12x^2 - 6y$

UNIDAD DIDÁCTICA 5

5.2 FACTORIZACIÓN POR AGRUPACIÓN

A simple vista, algunos polinomios se pueden agrupar aplicando la propiedad asociativa, de tal manera que se facilite determinar el máximo factor común – MFC para aplicarlo con la propiedad distributiva.

Ejemplo 1. Factoriza $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x + 6)$ propiedad asociativa

$= \mathbf{x^2}(x + 2) + \mathbf{3}(x + 2)$ factor común en cada binomio

$= (x+2)\,(\mathbf{x^2} + \mathbf{3})$ propiedad distributiva con el MFC

Ejemplo 2. Factoriza $6x^2 – 9xy^2 + 2x – 3y^2$

$6x^2 – 9xy^2 + 2x – 3y^2 = (6x^2 + 2x) + (– 9xy^2 – 3y^2)$ propiedad asociativa

$= \mathbf{2x}(3x + 1) – \mathbf{3y^2}(3x +1)$ factor común en cada binomio

$= (3x + 1)(\mathbf{2x} – \mathbf{3y^2})$ propiedad distributiva con el MFC

Ejercicios: factoriza por agrupación

a) $3y^2 + 6 – xy^2 –2x$
b) $x^3 + 2 + 2x^2 + x$
c) $4a^3 + 6a^2 + 2a + 3$
d) $3x^4 +12x^2 + x^2 + 4$
e) $6w^3 + 3w^2 + 2w + 1$

5.3 FACTORIZACIÓN CASO GENERAL

Usualmente, nos encontramos con un polinomio expresado como una suma de términos y nos piden expresarlo como un producto de factores, luego factorizar un polinomio significa expresarlo como el producto de polinomios irreducibles:

$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$, donde $x + 5$ y $x - 5$ son factores no triviales (factores que contienen polinomios de grado positivo), es decir, "todo polinomio **ax + b** de grado 1 es irreducible".

> Regla: Si un polinomio tiene coeficientes enteros, entonces los factores serán polinomios con coeficientes enteros.

El máximo factor común – MFC de una expresión es el producto de los factores que aparecen en cada término, con cada uno de estos factores elevado al mínimo exponente diferente de cero que aparezca en cualquier término.

Ejemplos:

a) $6x^2 - 12xy = 6x(x - 2y)$
b) $5x^2 - 25x + 30 = 5(x^2 - 5x + 6) = 5(x - 2)(x - 3)$
c) $18a^3b - 8ab^3 = 2ab(9a^2 - 4b^2) = 2ab(3a + 2b)(3a - 2b)$

Método de ensayo y error (Generar – Probar)

Factorizar el polinomio $\boldsymbol{px^2 + qxy + ry^2}$, equivale a expresarlo como el producto de factores de la forma:

$\boldsymbol{px^2 + qxy + ry^2 = (ax + by)(cx + dy)}$**,** combinación de raíces

= $\boldsymbol{acx^2 + adxy + bcxy + bdy^2}$, aplicando la propiedad distributiva

$\boldsymbol{px^2 + qxy + ry^2 = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2}$, aplicando factor común

A partir de la igualdad de polinomios, se deduce que:

ac = p

bd= r

ad + bc = q, ecuación de control

Ejemplo1. Factorizar $\boldsymbol{2x^2 + 5xy - 12y^2}$

Al extraer la raíz cuadrada de x^2 se obtiene x, y de y^2 se obtiene y, con lo cual:

$$\boldsymbol{2x^2 + 5xy - 12y^2 = (ax + by)(cx + dy)}$$

Dónde: ac=2, bd= –12, y ac + bd = 5

Por ensayo y error se obtiene: a=2, c=1, b=–3, d=4

$$\boldsymbol{2x^2 + 5xy - 12y^2 = (2x - 3y)(x + 4y)}$$

El resultado se puede comprobar multiplicando los respectivos factores.

Ejemplo 2. Factorizar $\boldsymbol{6x^4 + 5x^2y^3 + y^6}$

$$\boldsymbol{6x^4 + 5x^2y^3 + y^6 = (ax^2 + by^3)(cx^2 + dy^3)}$$

Dónde: ac=6, bd= 1, y ac + bd = 5

Por ensayo y error se obtiene: a=3, c=2, b=1, d=1

$$\boldsymbol{6x^4 + 5x^2y^3 + y^6 = (3x^2 + y^3)(2x^2 + y^3)}$$

Ejemplo 3. Factorizar $\boldsymbol{6x^2 - 7x - 3}$

$\boldsymbol{6x^2 - 7x - 3}$ = $\boldsymbol{6x^2 - 7x - 3(1^2)}$

UNIDAD DIDÁCTICA 5

$= (ax+b)(cx+d)$, se observa que y=1

Dónde: ac=6, bd= – 3, y ac + bd = – 7

Por ensayo y error se obtiene: a=3, c=2, b=1, d=– 3

Finalmente: $6x^2-7x-3=(3x+1)(2x-3)$

Ejemplo 4. Factorizar $10x^2-21y^2-15xz+29xy+9yz$

$$10x^2-21y^2-15xz+29xy+9yz=(10x^2+29xy-21y^2)-15xz+9yz$$

Factorizando $10x^2+29xy-21y^2=(5x-3y)(2x+7y)$ y sustituyendo se tiene:

$10x^2-21y^2-15xz+29xy+9yz=(5x-3y)(2x+7y)-15xz+9yz$

$10x^2-21y^2-15xz+29xy+9yz=(5x-3y)(2x+7y)-3z(5x-3y)$

$10x^2-21y^2-15xz+29xy+9yz=(5x-3y)(2x+7y-3z)$, factor común

CASO DE ESTUDIO

- **Factorizar completamente**

1. $20x^2+25$
2. $3x^2+9xy^3$
3. $xy+x+y+1$
4. $xy-5y+2x-10$
5. $xy+3x+y+3$
6. $x^2+x-xy-y$
7. x^2-y^2+x-y
8. x^2-4y^2-x-2y
9. $4x^2-25y^2+2x+5y$
10. $x^2+2xy+y^2-xy-yz$
11. $25x^2-16z^2-9y^2+24yz$

UNIDAD DIDÁCTICA 5

12. $(2x+3y)(x-y)+x-y$
13. $(4x+y)(3x-5y)-3x+5y$
14. $(8x+16y)(x-y)+4$
15. $12x^2-6x+4(1-2x)$
16. $3x^2-xy-2y^2$
17. $6x^4+5x^2y^2-6y^4$
18. $3x^2+8x-3$
19. $10x^2+11xy-6y^2$
20. $8x^4-6x^2y^3-9y^6$
21. $2x^2-5x-12$
22. $6x^2+7xy^2-20y^4$
23. $x^2+3x-10$
24. $3x^2+4xy^2-15y^4$
25. $x^2+2x-15$
26. x^4+x^2-2
27. x^4-2x^2-15
28. $8x^2+14xy^2-15y^4$
29. $6x^2-5xy-25y^2$
30. $9x^4+26x^2y^3-3y^6$
31. $10x^4-x^2y-3y^2$
32. $6x^4+7x^2y^3-5y^6$
33. $10x^4+31x^2y+15y^2$
34. $x^2-4xy+2xz+3y^2-2yz$
35. $8x^3-27y^3+4x^2-9y^2$
36. $x^3+x^2+2xy-3y^2-y^3$
37. $6x^2-24x+11xy-10y^2+16y$
38. $18x^2+18xz-3x-6z-1$
39. $21x^2+xy-24xz-10y^2+16yz$
40. $9x^2+72xz-22xy+40yz-15y^2$
41. $10x^2+15xy-19xz-15z^2+9yz$

42. $12x^2 - 5z^2 - 17xz - 8yz - 32xy$
43. $9y^2 - 9yz - 10z^2 - 12xy - 8xz$
44. $3x + 13\sqrt{xy} - 10y$
45. $6x - 35y - 11\sqrt{xy}$
46. $10x^2 + 11x\sqrt{y} - 6y$
47. $15y^2 + 19y\sqrt{x} - 10x$
48. $x^4 - 2x^3\sqrt{y} - 15x^2y$
49. $4x^4 + 8x^2y^2 + 9y^4$
50. $x^4 + 4y^4$

- **Cuestionario**

1. La expresión $5(x^2+5)+2$, ¿se encuentra factorizada completamente?
   Rta: Falsa

2. La expresión $3x^2 - 9xy^3 = 3x(x - 3y^3)$, ¿se encuentra factorizada completamente?
   Rta: Verdadera

3. Al factorizar la expresión $2mx + 4my - 3x - 6y$, se obtiene:
   a) $(x+2y)(2m-3)$
   b) $(x-2y)(2m-3)$
   c) $(x+2y)(2m+3)$
   d) $(x-2y)(2m+3)$

4. Al factorizar la expresión $x^3 + x^2 + 2x + 2$, se obtiene:
   a) $(x+1)(x^2+2)$
   b) $(x+2)(x^2+1)$
   c) $(x+1)(x^2-2)$

UNIDAD DIDÁCTICA 5

d) $(x-1)(x^2+2)$

5. Al factorizar la expresión $25x^2+15$, se obtiene:
   a) $5(5x^2+3)$
   b) $5(5x^2-3)$
   c) $5(5x^2+15)$
   d) $5x^2+3$

6. Al factorizar la expresión $ab+a+b+1$, se obtiene:
   a) $(a+1)(b+1)$
   b) $(a+b)(b+1)$
   c) $a(b+1)$
   d) $(a-1)(b-1)$

7. Al factorizar la expresión x^2-y^2+x-y, se obtiene:
   a) $(x-y)(x+y+1)$
   b) $(x+y)(x-y+1)$
   c) $(y-x)(x+y+1)$
   d) $(x-y)(x+y-1)$

8. Al factorizar la expresión x^2-4y^2-x-2y, se obtiene:
   a) $(x+2y)(x-2y-1)$
   b) $(x+2y)(x-2y+1)$
   c) $(x-2y)(x+2y-1)$
   d) $(x+2y)(x+2y-1)$

9. Al factorizar la expresión $4x^2-9y^2$, se obtiene:
   a) $(2x-3y)(2x+3y)$
   b) $(2x-3y)(3x+2y)$
   c) $(3x-2y)(2x+3y)$

d) $(2x+3y)(2x+3y)$

10. Al factorizar la expresión $4x^2-9y^2$, se obtiene como factor:
a) $(2x-3y)$
b) $(3x-2y)$
c) $(3x+2y)$
d) $(x+3y)$

11. Al factorizar la expresión $4x^2-9y^2$, se obtiene como factor:
a) $(2x+3y)$
b) $(3x+2y)$
c) $(3x-2y)$
d) $(x+3y)$

12. El factor $(3x-4y)$ se obtiene al factorizar la expresión:
a) $9x^2-16y^2$
b) $9x^2+16y^2$
c) $3x^2-4y^2$
d) $4x^2-16y^2$

13. El factor $(3x+4y)$ se obtiene al factorizar la expresión:
a) $9x^2-16y^2$
b) $9x^2+16y^2$
c) $3x^2-4y^2$
d) $4x^2-16y^2$

14. Al factorizar la expresión x^2+3x+2, se obtiene:
a) $(x+2)(x+1)$
b) $(x+2)(x-1)$
c) $(x-2)(x+1)$

d) $(x-2)(x-1)$

15. El factor $(x+2)$ se obtiene al factorizar la expresión:
   a) x^2+3x+2
   b) x^2+3x-2
   c) x^2-3x+2
   d) x^2-3x-2

16. Al factorizar la expresión $5x^2+13x-6$, se obtiene:
   a) $(x+3)(5x-2)$
   b) $(x-3)(5x-2)$
   c) $(5x+3)(x-2)$
   d) $(x+3)(5x+2)$

17. Al factorizar la expresión $6x^2+5xy^2-6y^4$, se obtiene:
   a) $(2x+3y^2)(3x-2y^2)$
   b) $(2x+3y^2)(3x+2y^2)$
   c) $(2x-3y^2)(3x+2y^2)$
   d) $(2x-3y^2)(3x-2y^2)$

18. Al factorizar la expresión $6x^2+5xy^2-6y^4$, se obtiene como factor:
   a) $(3x-2y^2)$
   b) $(3x+2y^2)$
   c) $(2x-3y^2)$
   d) $(2x+3y^2)$

19. Al factorizar la expresión $9x^4+26x^2y^3-3y^6$, se obtiene:
   a) $(9x^2-y^3)(x^2+3y^3)$
   b) $(9x^2-y^3)(x^2-3y^3)$
   c) $(9x^2+y^3)(x^2+3y^3)$

d) $(9x^2 + y^3)(x^2 - 3y^3)$

20. Al factorizar la expresión $9x^4 + 26x^2y^3 - 3y^6$, se obtiene como factor:
   a) $(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y})$
   b) $(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})$
   c) $(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$
   d) $(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})$

21. Al factorizar la expresión $2x - 13\sqrt{xy} + 15y$, se obtiene:
   a) $(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y})(\sqrt{x} - 5\sqrt{y})$
   b) $(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(\sqrt{x} - 5\sqrt{y})$
   c) $(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y})(\sqrt{x} + 5\sqrt{y})$
   d) $(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(\sqrt{x} + 5\sqrt{y})$

22. Al factorizar la expresión $2y^2 - y\sqrt{x} - x$, se obtiene:
   a) $(2y - 3\sqrt{x})(y + \sqrt{x})$
   b) $(2y + 3\sqrt{x})(y + \sqrt{x})$
   c) $(2y + 3\sqrt{x})(y - \sqrt{x})$
   d) $(2y - 3\sqrt{x})(y - \sqrt{x})$

23. Al factorizar la expresión $2y^2 - y\sqrt{x} - x$, se obtiene como factor:
   a) $(y + \sqrt{x})$
   b) $(y - \sqrt{x})$
   c) $(y + 2\sqrt{x})$
   d) $(2y + \sqrt{x})$

24. Al factorizar la expresión $2x^4 - x^2 - 15$, se obtiene:
    a) $(x^2 - 3)(2x^2 + 5)$
    b) $(x^2 - 3)(2x^2 - 5)$
    c) $(x^2 - 3)(5x^2 + 2)$
    d) $(x^2 + 3)(2x^2 + 5)$

25. Al factorizar la expresión $2x^4 - x^2 - 15$, se obtiene como factor:
    a) $(x^2 - 3)$
    b) $(x^2 + 3)$
    c) $(3x^2 - 1)$
    d) $(x^2 - 5)$

CONCLUSIONES

Comprender los conceptos matemáticos básicos como insumo para resolver problemas complejos mediante la modelación de relaciones entre variables, permite abordar fenómenos económicos, financieros y logísticos presentes en la administración pública, con lo cual se promueve la toma de decisiones de manera racional, así como la gestión de recursos para satisfacer necesidades.

MATERIAL DE ESTUDIO

UNIDAD DIDÁCTICA 5

Tema que abordan	Referencia bibliográfica	Ubicación
Tema 5 Factorización	Academia Izaguirre (2012). Factorización algebraica -Que es factorizar?	Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=AJ57CPg7Hsw
	Academia Izaguirre (2012). Factorización por agrupamiento de términos.	Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=kzlgIyHmLNA
	Casvar FM. (2015). ¿Qué es factorizar? Y factor común.	Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=GsI99lcyiIE
	Julioprofe (2009). Factor común.	Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=AJ57CPg7Hsw
	Proyecto Ibertel Honduras. (2012). Factorización por tanteo.	Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=gbeMDFfnmew

UNIDAD DIDÁCTICA 5

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS DEL CONTENIDO DISCIPLINAR

Angel, Allen. (2008). Álgebra intermedia. 7 Ed. Pearson Educación. México.

Arya, Jagdish., Lardner, Robin., Ibarra, Víctor. (2009). Matemáticas aplicadas a la Administración y Economía. 5 Ed. Prentice Hall. México.

Aufmann, Richard., Lockwood, Joanne. (2013). Álgebra intermedia. 8 Ed. Cengage Learning. México.

Haeussler, Ernest., Paul, Richard., Wood, Richard. (2008). Matemáticas para Administración y Economía. 12 Ed. Pearson – Prentice Hall. México.

Hernández, Hernán. (2004). Razonamiento Matemático. Estrategias en la resolución de problemas. 1 Ed. Editorial Ingenio S.A. Lima. Perú.

Hoffmann, Laurence., Bradley, Gerald., Rosen, Kenneth. (2006). Cálculo Aplicado para Administración, Economía y Ciencias Sociales. 8 Ed. McGraw-Hill. México.

Jiménez, René. (2011). Matemáticas 1 – Álgebra. 2 Ed. Prentice Hall. México.

Silva, Omar. (1994). Matemáticas Básicas. Universidad Externado de Colombia. Bogotá. Colombia.

Swokowski, Earl., Cole, Jeffery. (2011). Álgebra y Trigonometría. 13 Ed. Cengage Learning. México.

UNIDAD DIDÁCTICA 5

Tan, Soo. (2012). Matemáticas Aplicadas a los Negocios, Las Ciencias Sociales y de la Vida. 5 Ed. Cengage Learning. México.

WEBGRAFÍA

Definición ABC (2017). Tu Diccionario Hecho Fácil. Disponible en: https://www.definicionabc.com/ (19/05/17)

Disfruta Las Matemáticas (2017). Diccionario ilustrado de Matemáticas. Disponible en: http://www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/index.html (12/05/17)

Profesor en Línea (2017). Tú ayuda para las tareas. Disponible en: http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Indice_general_matematica.html (01/06/17)

Recursos TIC (2017). Ministerio de Educación, Formación Profesional y Universidades. España. Disponible en: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/ (20/05/17)

GLOSARIO

Conjunto: Colección de elementos enumerados entre llaves { }.

Exponente: El exponente de un número muestra cuántas veces el número se va a utilizar en la multiplicación.

Expresión: Números, símbolos y operadores (como + y ×) agrupados para mostrar el valor de algo.

Factorización: Factorizar una expresión (suma de términos) significa escribirla como producto de dos o más términos llamados factores, con el objetivo de simplificarla y así poder resolver ecuaciones.

Polinomio: Expresión algebraica cuyo exponente es un entero positivo.

Radical: Una expresión que tiene raíz cuadrada, raíz cúbica, etc.

Término: Es un número o una variable, o números y variables multiplicados.

Términos semejantes: Términos que tienen iguales variables (letras) e iguales exponentes.

Variable: Un símbolo para un número que aún no sabemos. Es normalmente una letra como x o y.